8 – апта.

Меншіксіз интегралдар.

Мысал №1. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=ln\,x\Big|_1^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty} ln\,x-ln1=\infty$. Сонымен, бұл интеграл жинақсыз.

Мысал №2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=arctgx\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty} arctgx-\lim\limits_{x\to-\infty} arctgx=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$. Ендеше, меншіксіз интеграл жинақты.

Мысал №3. Бірінші текті меншіксіз интеграл берілген: $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}\ (\alpha>0)$. α -ның қандай мәнінде бұл интеграл жинақты, ал қандай мәнінде жинақсыз.

► $\alpha\neq1$ болсын. Онда $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim\limits_{\beta\to+\infty}\int_1^{\beta}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim\limits_{\beta\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}\Big|_1^{\beta}=\lim\limits_{\beta\to+\infty}\frac{\beta^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}=\begin{cases}\frac{1}{\alpha-1}, если\ \alpha>1\\ +\infty, если\,\alpha<1\end{cases}$

Егер $\alpha=1$ болса, онда $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{\beta\to+\infty}\int_1^{\beta}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{\beta\to+\infty} ln\beta=+\infty,$ яғни, берілген интеграл жинақсыз.

Нәтижесінде: $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\begin{cases}\frac{1}{\alpha-1}, егер\,\alpha>1 \quad (жинакты)\\ +\infty, егер\ 0<\alpha\leq1 \quad (жинаксыз)\end{cases}$ ◄.

Мысал №4. $\int_{-1}^{0-}\frac{dx}{x}=ln|x|\Big|_{-1}^{0}=\lim\limits_{x\to0-0} ln|x|-ln|-1|=-\infty-0$. Яғни, интеграл жинақсыз.

Мысал №5. Екінші текті меншіксіз интеграл берілсін $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ $(\alpha > 0)$. α -ның қандай мәнінде бұл интеграл жинақты, ал қандай мәнінде жинақсыз екендігін анықта.

► $x = 0$ болғанда интеграл астындағы функция шектелмеген. Егер $\alpha \neq 1$ болса, онда

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & егер \quad \alpha < 1, \\ \infty, & егер \quad \alpha > 1. \end{cases}$$

Егер $\alpha = 1$ болса, онда $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0+0} ln|x| \Big|_\varepsilon^1 = -\lim_{\varepsilon \to 0+0} ln\varepsilon = +\infty.$

Нәтижесінде: $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, егер \quad 0 < \alpha < 1 \quad (\textit{жинақты}) \\ +\infty, егер \quad \alpha \geq 1 \quad (\textit{жинақсыз}) \end{cases}$ ◄

Мысал №6. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x}$.

Жоғарыда көрсетілгендей, $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x}$ жинақсыз, ендеше, $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ интегралы да жинақсыз. также расходится. Бұл интегралды Ньютона – Лейбниц формуласы бойынша есептеу

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = ln|x| \Big|_{-1}^1$$

ақиқат болмайды, себебі интеграл астындағы $y = \frac{1}{x}$ функция x=0 нүктесінде үзілісті функция.